Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Creative Challenge

Die Lösung der Creative Challenge müssen Sie persönlich in 10 Minuten erklären. Sie können sich ab 12:15 (nach der Speed-Challenge) bei der Anmeldung für einen Termin eintragen. Sollten Sie zur Aufgabenstellung Fragen oder Probleme haben, dann können Sie sich gerne an uns wenden.

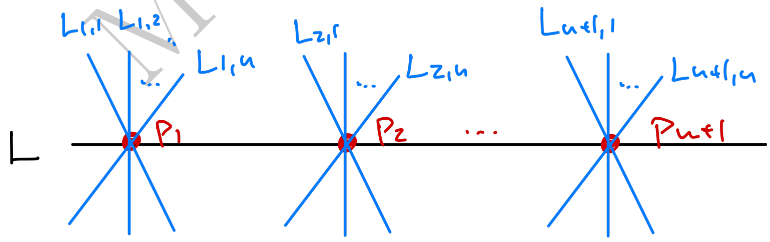
Teamname:

Creative Challenge

Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung n. Zeigen Sie, dass es genau $n^2 + n + 1$ viele Geraden gibt.

1. Lösung

Der Beweis der Aussage wird durch folgendes Bild illustriert



Formal: Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung n. Wähle eine Gerade $L \in \mathcal{L}$. Nach Definition der Ordnung gilt, dass genau $n+1$ Punkte auf L liegen. Sei also $L = \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$. Nach Aussage (S1) aus den Notizen gilt, dass durch jeden Punkt p_i genau $n+1$ Geraden gehen. Also zusätzlich zur Gerade L gibt es Geraden $L_{i,j}$ mit $j = 1, \dots, n$, so dass $p_i \in L_{i,j}$ gilt.

1.Behauptung: Die Geraden $L_{i,j}$ sind alle verschieden.
Angenommen zwei Geraden sind gleich. Seien $(i,j) \neq (k,l)$ mit $L_{i,j} = L_{k,l}$. Es gilt $i \neq k$, da für festes i die Geraden $L_{i,j}$ alle verschieden sind. Für $i \neq k$ ist aber nun $L_{i,j} = L_{k,l}$ eine Gerade,

die durch die Punkte p_i und p_k eindeutig bestimmt ist. Allerdings ist L ebenfalls durch p_i und p_k eindeutig bestimmt und somit gilt $L = L_{i,j}$. Das steht im Widerspruch zur Definition von $L_{i,j}$.

2.Behauptung: Für jede Gerade $L' \in \mathcal{L}$ gilt $L = L'$ oder $L' = L_{i,j}$ für ein Tupel (i, j).
Sei $L' \in \mathcal{L}$ beliebig. Ist $L' = L$, dann sind wir fertig. Sonst gilt nach Eigenschaft (P2), dass L' und L sich in einem Punkt p_i. Damit ist L' eine Gerade durch p_i und somit $L' = L_{i,j}$ für ein $j = 1, \dots, n$.

3.Behauptung: $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$.
Aus den vorherigen Behauptungen folgt, dass $\mathcal{L}$ aus den Geraden L und $L_{i,j}$ für $i = 1, \dots, n + 1$ und $j = 1, \dots, n$ besteht. Da sind genau $1 + (n + 1)n = n^2 + n + 1$ viele verschiedene Geraden.

2. Lösung

Wir zählen die Anzahl Paare (p, L) mit $p \in \mathcal{P}$, $L \in \mathcal{L}$ und $p \in L$ und bezeichen diese Anzahl mit X.
Nach Aussage (S1) aus den Notizen wissen wir, dass durch jeden Punkt genau $n+1$ Geraden gehen. Jeder Punkt tritt also in genau $n + 1$ Paaren auf. Aus (S2) wissen wir, dass es genau $n^2 + n + 1$ viele Punkte gibt. Wir folgern also, dass $X = (n + 1)(n^2 + n + 1)$ gilt.
Nach der Definition der Ordnung gilt aber auch, dass auf jeder Geraden genau $n + 1$ viele Punkte liegen. Jede Gerade L tritt also ebenfalls in $n + 1$ Paaren auf. Wenn wir mit ℓ die Anzahl Geraden von $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ bezeichnen, dann gilt also $X = (n + 1)\ell$. Aus $(n + 1)(n^2 + n + 1) = X = (n + 1)\ell$ folgt dann $\ell = n^2 + n + 1$.